三次函数切割线的斜率关系

曾文远

中国/北京市/北京十一学校

指导教师：潘国双

摘要：

本文主要研究三次函数零点，拐点，极值点几种特殊点处切线的斜率和三次函数上任意一点的切割线斜率之间的关系。并且简单的探究了三次函数的图像，能够通过三次函数所对应三次方程的解大致描绘出三次函数的图像，同时给出了三次函数新的一种定义方法

本文在后面的附录中将文中所有的结论都列举了出来，为了便于读者查找的方便

引理：

一、三次函数的对称中心为拐点。

设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，可得 $f''(x)=6ax+2b(a\neq 0)$，得拐点坐标为 $\left(-\frac{b}{3a},f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$。可得对任意 $x\in R$ 均有

$$
\begin{aligned}
&f\left(-\frac{b}{3a}-x\right)+f\left(-\frac{b}{3a}+x\right)\\
&=a\left(-\frac{b}{3a}-x\right)^3+b\left(-\frac{b}{3a}-x\right)^2+c\left(-\frac{b}{3a}-x\right)+d\\
&+a\left(-\frac{b}{3a}+x\right)^3+b\left(-\frac{b}{3a}+x\right)^2+c\left(-\frac{b}{3a}+x\right)+d\\
&=2\left[a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(-\frac{b}{3a}\right)+d\right]\\
&=2f\left(-\frac{b}{3a}\right)
\end{aligned}
$$

所以三次函数的对称中心为其拐点。

二、任意三次函数经过配凑（平移）后均可得到 $f(x)=ax^3+mx+n(a\neq 0)$ 的形式。

设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，经过整理配凑后即可得到形式 $f(x)=a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+m\left(x+\frac{b}{3a}\right)+n(a\neq 0)$，所以在研究三次函数的某些性质时，可以仅研究关于原点对称的三次函数，其余任意的三次函数均可通过此三次函数的坐标变换（平移）得到。

三、n 次方程的韦达定理：设 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0(a_n\neq 0)$，当此方程有 n 个实根时，可以通过变形整理为 $a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots\cdots(x-x_1)=0(a\neq 0)$，所以：

$$
\begin{cases}
\sum_{i}^{n} x_i = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\
\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\
\sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\
\cdots\cdots \\
x_1 x_2 \cdots\cdots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}
\end{cases}
$$

性质：

性质一： 对三次函数 $f(x)=ax^3+mx(a\neq 0)$，其上除拐点外的任意一点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与此三次函数有且仅有两个交点，一为 $(x_0,f(x_0))$，一为 $(-2x_0,f(-2x_0))$

推广：由于任意三次函数均可通过平移使其对称中心在原点处，所以 $(x_0,f(x_0))$ 处切线与此三次函数的两个交点 A,B 的横坐标和三次函数拐点横坐标之差的比值为定值 -2

问题引入： 求曲线 $f(x)=x^3$ **过**点 $(1,1)$ 处的切线方程。

由于题目中是“过”，而不是“在”，所以有可能存在函数上其他位置的切线过这一点。从而想到探究过三次函数上一点的切线有几条的问题。

证明： 由于任意三次函数经过平移后都能得到 $f(x)=ax^3+mx(a\neq 0)$ 的形式，即一支关于原点对称的三次函数，只需研究此种情况，对于一般情况只需经过平移变换之后即可。

设 $f(x)=ax^3+mx(a\neq 0)$，则 $f'(x)=3ax^2+m(a\neq 0)$，设函数上某点 $(x_0,f(x_0))$，欲求过此处的切线 $l_{切}$。设 $l_{切}$ 为函数在 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线，联立方程：

$$\begin{cases} l_{切}: y=\left(3ax_1^2+m\right)x-2ax_1^3 \\ f(x): y=ax^3+mx \end{cases}$$，把 $(x_0, f(x_0))$ 带入此方程组，可得 $ax_0{}^3+mx_0=\left(3ax_1^2+m\right)x_0-2ax_1^3$ 对于此方程，由于已知 $x=x_0$ 必为其一个解，通过因式分解可得另一个解为 $x=-\frac{1}{2}x_0$ 即 $x_0=-2x_1$，结论得证。

对于一般情况，由于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 的对称中心为 $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$，可得到一般结论：函数在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线和三次函数的两个交点 $(x_0, f(x_0))$，$(x_1, f(x_1))$ 有如下关系 $x_0+\frac{b}{3a}=-2\left(x_1+\frac{b}{3a}\right)$

性质二： 设 $f(x)=ax^3+mx(a\neq 0)$，在函数上任意异于拐点的一点 $A\,(x_0, f(x_0))$ 处的切线和三次函数交于另一点 B，A B 两点间三次函数和切线所围成的封闭图形的面积 $S=\frac{27}{4}ax_0{}^4$

问题引入： 由性质一得知两个交点之间的关系，很自然的想到围成的面积是否有简单的关系。

证明： 由于任意三次函数经过平移后都能得到 $f(x)=ax^3+mx(a\neq 0)$ 的形式，即关于原点对称的三次函数，只需研究此种情况，对于一般情况只需经过平移变换之后即可。因为面积是平移不变量。

设 $f(x)=ax^3+mx(a\neq 0)$，三次函数上除拐点外任意一点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线 $l_{切}: y=\left(3ax_0^2+m\right)x-2ax_0^3$，令 $F(x)=l_{切}-f(x)$，则三次函数和切线所围

成的封闭图形的面积 S 即为 $F(x)$ 在区间 $(x_0,-2x_0)$（或调换 $x_0,-2x_0$）上定积分的绝对值

$$S=\left|\int_{x_0}^{-2x_0}F(x)dx\right|=\left|\int_{x_0}^{-2x_0}\left(ax^3-3ax_0^2x+2ax_0^3\right)dx\right|$$

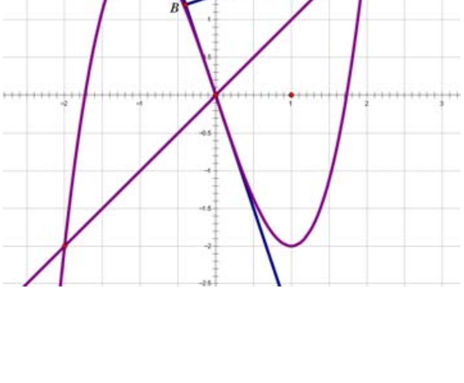
$$=\left|\frac{1}{4}ax^4\Big|_{x_0}^{-2x_0}-\frac{3}{2}ax_0^2x^2\Big|_{x_0}^{-2x_0}+2ax_0^3x\Big|_{x_0}^{-2x_0}\right|$$

$$=\frac{27}{4}a{x_0}^4$$

得证。

若对于一般情况，对函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 上任意一点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线，均有三次函数和切线所围成的封闭图形的面积 $S=\frac{27}{4}a(x_1+\frac{b}{3a})^4$

性质三： 设 $f(x)=ax^3+mx(am<0)$，过其拐点做 $f(x)$ 的切线 $l_{切}$，再做直线 $y=kx(若a>0则k\geq m，若a<0则k\leq m)$，则 $y=kx$ 和 $f(x)$ 的交点到 $l_{切}$ 的距离为 $d=\left(\frac{m-k}{m+\frac{1}{m}}\right)^{\frac{3}{2}}d_0$ 其中，d_0 为函数在拐点处的法线与三次函数的交点距 $l_{切}$ 的距离。



问题引入：从圆锥曲线的极坐标的表达形式$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$想到三次函数是否也有类似的表达形式。由于三次函数是关于拐点对称的，所以想到做过拐点的切线作为类似于圆锥曲线中的焦点。为了对应圆锥曲线中的$\cos\theta$项，想到三次函数中切线的k值即为$\tan\theta$

证明：设$f(x)=ax^3+mx(am<0)$，则$y=kx(若a>0则k\ge m，若a<0则k\le m)$与此函数的两个交点分别为$(\sqrt{\frac{k-m}{a}},f\left(\sqrt{\frac{k-m}{a}}\right))$和$(-\sqrt{\frac{k-m}{a}},f\left(-\sqrt{\frac{k-m}{a}}\right))$

利用点到直线的距离公式$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|a\left(\sqrt{\frac{k-m}{a}}\right)^3\right|}{\sqrt{m^2+1}}$

把$k=-\frac{1}{m}$带入上式可得$d_0=\frac{\left|a\left(\sqrt{\frac{-\frac{1}{m}-m}{a}}\right)^3\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\left|\left(m+\frac{1}{m}\right)\sqrt{-\frac{1}{am}}\right|$

带入一般的一条直线$y=kx$，整理后即可得到该结论。

问题反思：该性质对一般的有两个极值点的三次函数也是成立的，只不过需要通过坐标变换将$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$中拐点坐标$\left(-\frac{b}{3a},f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$变换到原点即可。既然正着可以推过去，那么反着是否能推回来呢？

性质四：

设有一定直线$y=mx$和一动直线$y=kx\left(m\times(m-k)>0\right)$，对任意动直线满

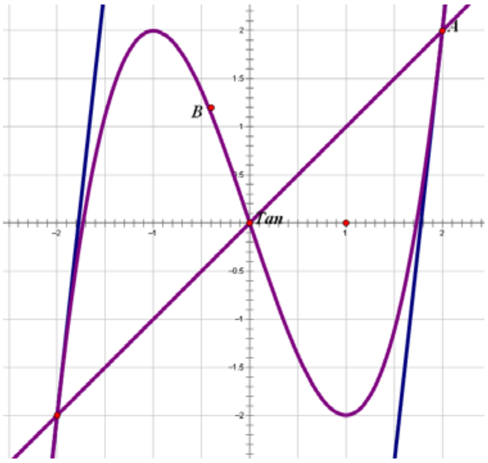
足限定条件，均有动直线上某点到定直线 $y=mx$ 的距离 $d=p(k-m)^{\frac{3}{2}}$，由这些点组成的图像即为一支三次函数的图像。（**三次函数的第二定义**）

证明： 设 (x_0,kx_0) 是图像上某点，由点到直线的距离公式 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 得 $|x_0|=p'\sqrt{|k-m|}$，将 $k=\frac{y_0}{x_0}$ 带入上式，即可得 $y_0=\frac{1}{p'^2}x_0^3+mx_0$，即这些点组成的图像为三次函数。

问题反思： 该性质得到三次函数的第二种表述：设有一定直线 $y=mx$ 和一动直线 $y=kx(m\times(m-k)>0)$，对任意动直线满足限定，均有动直线上某点到定直线 $y=mx$ 的距离 $d=p(k-m)^{\frac{3}{2}}$，则这些点组成的函数图像即为关于原点对称的三次函数。不过我们发现，这个性质相对圆锥曲线的极坐标表达形式有更多的限制条件，笔者认为，这可能是由于圆锥曲线是一个封闭图形，而三次函数是开放图形所导致的。

至此，我们得到了三次函数的新的表述方式。

性质五： 对函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，若其上有两点的导数值相等，则此两点连线必过函数的拐点 $\left(-\frac{b}{3a},f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$



证明： 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，则 $f'(x)=3ax^2+2bx+c(a\neq 0)$，若 A,B 两点的导数值相等，即 $f'(x_A)=f'(x_B)$，由二次函数的性质得：A,B 的横坐标关于 $f'(x)$ 的对称轴 $x=-\dfrac{b}{3a}$ 对称。又因为 $\left(-\dfrac{b}{3a},f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ 为 $f(x)$ 的对称中心，所以 A,B 关于 $\left(-\dfrac{b}{3a},f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ 对称，即 A,B 连线过拐点

问题反思： 三次函数的对称中心的横坐标为二次函数的对称轴横坐标，且三次函数求导为二次函数，是否有奇函数的导函数为偶函数，偶函数的导函数为奇函数呢？经验证，猜想正确。

证明： 设函数 $f(x)$ 为奇函数，有 $f(-x)=-f(x)$

对函数上任意一点 $(x_0,f(x_0))$，由导函数的定义可得 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\dfrac{f(-x_0)-f(-x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(-x_0)$，由于 $(x_0,f(x_0))$ 为任意一点，所以可证得奇函数的导函数为偶函数，另一个结论也可由类似方法证明。

性质六： 对三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，若有三个零点

$A\ (x_1,0)$, $B\ (x_2,0)$, $C\ (x_3,0)$。设 k_i 为 $(x_i,0)$ 处函数切线的斜率, 有 $\sum_i^3 \frac{1}{k_i}=0$

和 $\sum_i^3 \frac{x_i}{k_i}=0$。

证明： 因为三个零点为 $A\ (x_1,0)$, $B\ (x_2,0)$, $C\ (x_3,0)$，可得

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

因为 $f'(x)=3ax^2+2bx+c(a\neq 0)$

$$\sum_i^3 \frac{1}{k_i}=\frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{k_1k_2k_3}$$

$$=\frac{9a^2\left(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2\right)+6ab\left(x_1^2x_2+x_2^2x_1+x_1^2x_3+x_3^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_2\right)}{\left(3ax_1^2+2bx_1+c\right)\left(3ax_2^2+2bx_2+c\right)\left(3ax_3^2+2bx_3+c\right)}$$

$$+\frac{6ac\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+4b^2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)+4bc(x_1+x_2+x_3)+3c^2}{\left(3ax_1^2+2bx_1+c\right)\left(3ax_2^2+2bx_2+c\right)\left(3ax_3^2+2bx_3+c\right)}$$

$$=\frac{9a^2\left[\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)^2-2x_1x_2x_3\left(x_1+x_2+x_3\right)\right]}{\left(3ax_1^2+2bx_1+c\right)\left(3ax_2^2+2bx_2+c\right)\left(3ax_3^2+2bx_3+c\right)}$$

$$+\frac{6ab\left[(x_1+x_2+x_3)\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)-3x_1x_2x_3\right]}{\left(3ax_1^2+2bx_1+c\right)\left(3ax_2^2+2bx_2+c\right)\left(3ax_3^2+2bx_3+c\right)}$$

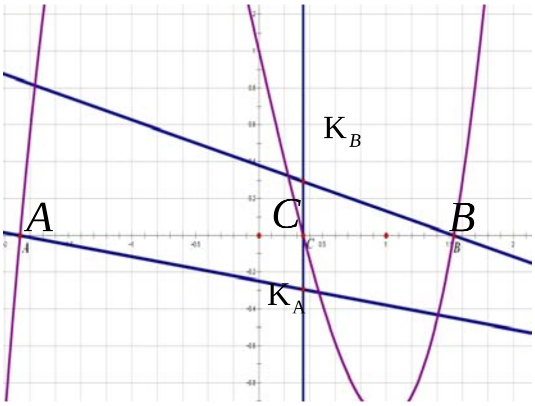
$$+\frac{6ac\left[\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)\right]}{\left(3ax_1^2+2bx_1+c\right)\left(3ax_2^2+2bx_2+c\right)\left(3ax_3^2+2bx_3+c\right)}$$

$$+\frac{4b^2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)+4bc(x_1+x_2+x_3)+3c^2}{\left(3ax_1^2+2bx_1+c\right)\left(3ax_2^2+2bx_2+c\right)\left(3ax_3^2+2bx_3+c\right)}$$

根据韦达定理 $\begin{cases}\sum_i^3 x_i=-\frac{b}{a}\\ \sum_{1\le i<j\le 3} x_ix_j=\frac{c}{a}\\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}\end{cases}$，可算得 $\sum_i^3 \frac{1}{k_i}=0$

同理 $\sum_i^3 \frac{x_i}{k_i}$ 也可通过类似方法展开后用韦达定理化简得到 $\sum_i^3 \frac{x_i}{k_i}=0$

性质七： 对三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，若有三个零点 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，$C(x_3,0)$。任取两个零点，分别做该零点处三次函数的法线 l_A，l_B，再做过另一零点 C 且与 y 轴平行的直线 L_c，则 L_c 和 l_A，l_B 分别交于 K_A，K_B，线段 $\overline{K_AK_B}$ 的中点即为 C 点。



证明： $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(a\neq 0)$，设 k_i 为 $(x_i,0)$ 处函数切线的斜率。通过韦达定理，可以算得 $\sum_i^3\frac{1}{k_i}=0\cdots\cdots(1)$ 以及 $\sum_i^3\frac{x_i}{k_i}=0\cdots\cdots(2)$，将 (1) 式等号两边同时乘以 x_3 再减去 (2) 式可得：$\frac{x_3-x_1}{k_1}=\frac{x_2-x_3}{k_2}$，又因为 k 为该处切线的正切值，$\frac{1}{k}$ 即为余切值，x_3-x_1 为 AC 长度，x_2-x_3 为 BC 长度。故 $\frac{x_3-x_1}{k_1}$ 为 CK_A 长度，$\frac{x_2-x_3}{k_2}$ 为 CK_B 长度。所以有 CK_A 长度和 CK_B 长度相等，故结论得证。

性质八： 若三次函数有三个不全相等的零点，则三个零点处的切线斜率之和的算术平均值和拐点处切线的斜率的和为零。

问题引入： 有了结论$\sum_{i}^{3}\frac{1}{k_i}=0$，自然想到求$\sum_{i}^{3}k_i$

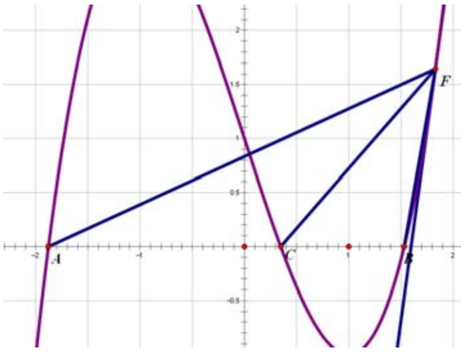
证明： 设$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(a\neq 0)$，设$k_i$为$(x_i,0)$处的导数值。

通过韦达定理，即可得到$\sum_{i}^{3}k_i=-3f'(x_{拐})$

问题反思： $f(x)$的零点相当于$f(x)$和特殊的直线$y=0$的交点，如果是任意直线$y=px+q$呢？

证明： 用设$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，用上述类似方法可得到结论$\sum_{i}^{3}k_i=\frac{b^2}{a}-3c+3p$

性质九： 若一个三次函数有三个零点，则对于三次函数上任意一个异于零点的点$(x_0,f(x_0))$，有此点和三个零点分别连线的斜率之和等于函数在该点切线的斜率



证明： 设$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，则$k_i=\frac{f(x_0)-f(x_i)}{x_0-x_i}$其中，$(x_i,0)$为

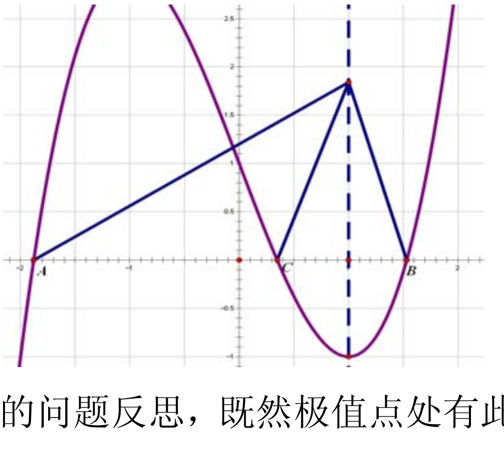
函数的零点，利用$\begin{cases} {x_0}^3-{x_i}^3=(x_0-x_i)(x_0^2+x_0x_i+{x_i}^2) \\ {x_0}^2-{x_i}^2=(x_0-x_i)(x_0+x_i) \\ x_0-x_i\neq 0 \\ f(x_i)=a{x_i}^3+b{x_i}^2+cx_i+d=0 \\ f'(x_0)=3a{x_0}^2+2bx_0+c \end{cases}$

以及韦达定理$\begin{cases} \sum_{i}^{3}x_i=-\dfrac{b}{a} \\ \sum_{1\le i<j\le 3}x_ix_j=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$

即可得证。

问题反思： 如果令 $(x_0, f(x_0))$ 为函数的一个极值点，就能得到此性质的特殊形式，即：若三次函数有三个互不相等的实根，则函数极值点到这三点连线斜率的和为零。

性质十： 若一个三次函数有三个互不相同的零点，则对于过函数极值点与 y 轴平行的直线上的任意一点 A，均有 A 和三个零点连线斜率之和为零。

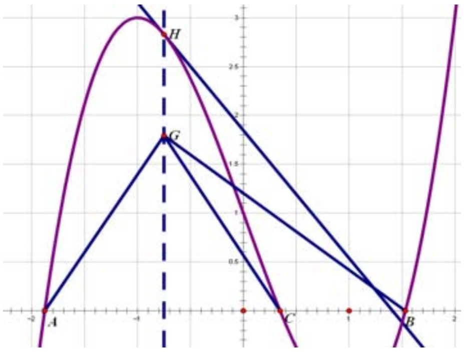


问题引入： 由性质九的问题反思，既然极值点处有此性质，那极值点所在平行于 y 轴直线上的点有何性质

证明： 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，极值点所在直线上点为 (x_0,y_0)，零点为 $(x_i,0)$ 则 $k_i=\dfrac{y_0-f(x_i)}{x_0-x_i}$

利用 $\begin{cases}\sum\limits_{i}^{3}x_i=-\dfrac{b}{a}\\ \sum\limits_{1\le i<j\le 3}x_ix_j=\dfrac{c}{a}\\ x_0-x_i\neq 0\\ f(x_i)=0\\ f'(x_0)=3ax_0^{\ 2}+2bx_0+c=0\end{cases}$ 可得最终结论。

性质十一： 若一个三次函数有三个零点，则对平面上任意一个 (x_0,y_0) 且 $(x_0,0)$ 不是三次函数任意一个零点，则有该点和三次函数三个零点连线斜率之和为 $y_0\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}$



问题引入： 由于性质十是极值点所在平行于 y 轴的直线上的点，于是想到对一般的不在函数上的点有何性质

证明： 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，函数外一点为 (x_0,y_0)，函数零点为 $(x_i,0)$，则 $k_i=\dfrac{y_0-f(x_i)}{x_0-x_i}$

利用$\begin{cases}\sum_{i}^{3} x_i = -\frac{b}{a} \\ \sum_{1\le i<j\le 3} x_i x_j = \frac{c}{a} \\ x_0 - x_i \ne 0 \\ f(x_i) = 0 \\ f'(x_0) = 3a{x_0}^2 + 2bx_0 + c \end{cases}$

类似于性质十的证明即可得到结论

问题反思： 显然性质九和性质十是性质十一的特殊形式，当(x_0, y_0)为三次函数上一点，即$y_0 = f(x_0)$时，回归性质九，当(x_0, y_0)为过函数极值点与y轴平行的直线上的任意一点时，$f'(x_0) = 0$此时回归性质十。

又想到该性质是对于三次函数而言的，如果对于一般的有n个实根的n次多项式函数而言是否也有这些性质

证明： 设$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\cdot\cdots\cdots(x - x_n)(a \ne 0)$，函数外一点为$(x_0, y_0)$，函数零点为$(x_i, 0)$，则$k_i = \frac{y_0 - f(x_i)}{x_0 - x_i}$

利用n次多项式的韦达定理和类似于性质九，十的证明即可得到该结论。

性质十二： 若已知一个三次方程的三个根，一个为实根x_0，另两个为共轭的虚根$p \pm qi$，则可以大致画出三次方程所对应的三次函数的图像

证明： 设$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d(a \ne 0)$，对应的三次方程的根为$x_0$，$p \pm qi$

则拐点坐标为$(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$，

由韦达定理可知$-\frac{b}{3a}=\frac{x_0+(p+qi)+(p-qi)}{3}=\frac{x_0+2p}{3}$，

可判断出函数对称中心的实数轴上零点的大小关系。

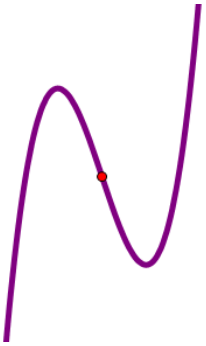
$f'(x)=3ax^2+2bx+c(a\neq 0)$，则极值点的横坐标为$f'(x)$的零点的横坐标

$$x_{极}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}=\frac{-b}{3a}\pm\frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-3\frac{c}{a}}}{3}$$

由韦达定理$\begin{cases}\sum_{i}^{3}x_i=-\frac{b}{a}\\ \sum_{1\le i<j\le 3}x_ix_j=\frac{c}{a}\end{cases}$ 有$x_{极}=\frac{-b}{3a}\pm\frac{\sqrt{\left(\sum_{i}^{3}x_i\right)^2-3\sum_{i<j}x_ix_j}}{3}$

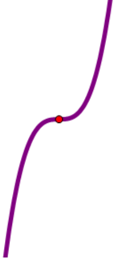
$\therefore$1）当$\left(\sum_{i}^{3}x_i\right)^2-3\sum_{i\le j}x_ix_j>0$时，三次函数有极值点（如$f(x)=x^3-x$）

此时，将三个根带入有$|x_0-p|>|\sqrt{3}q|$



2）当$\left(\sum_{i}^{3}x_i\right)^2-3\sum_{i\le j}x_ix_j=0$时，三次函数无极值点（如$f(x)=x^3$）

此时，将三个根带入有$|x_0-p|=|\sqrt{3}q|$



3）当$\left(\sum_{i}^{3} x_i\right)^2 - 3\sum_{i\le j} x_i x_j < 0$时，三次函数无极值点（如$f(x)=x^3+x$）

此时，将三个根带入有$|x_0 - p| < |\sqrt{3}q|$

附录：

1、对三次函数 $f(x)=ax^3+mx(a\neq 0)$，其上除拐点外的任意一点 $(x_0, f(x_0))$ 处函数的切线与此三次函数有且仅有两个交点，一为 $(x_0, f(x_0))$，一为 $(-2x_0, f(-2x_0))$

推广：由于任意三次函数均可通过平移使其对称中心在原点处，所以 A，B 的横坐标和三次函数拐点横坐标之差的比为定值 -2。由于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 的对称中心为 $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$，可得到一般结论：函数的某条切线和三次函数的两个交点 $(x_0, f(x_0))$，$(x_1, f(x_1))$ 有如下关系 $x_0+\frac{b}{3a}=-2\left(x_1+\frac{b}{3a}\right)$。

2、设 $f(x)=ax^3+mx(a\neq 0)$，在函数上任意一点 A $(x_0, f(x_0))$ 处的切线和三次函数交于另一点 B，A，B 两点间三次函数和切线所围成的封闭图形的面积 $S=\frac{27}{4}a{x_0}^4$

若对于一般情况，函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，对任意一点 $(x_1, f(x_1))$ 处函数的切线，均有三次函数和切线所围成的封闭图形的面积 $S=\frac{27}{4}a\left(x_1+\frac{b}{3a}\right)^4$。

3、设 $f(x)=ax^3+mx(am<0)$，过其拐点做该函数的切线 $l_{切}$，再做直线 $y=kx(若a>0则k\geq m，若a<0则k\leq m)$，则 $y=kx$ 和 $f(x)$ 交点到 $l_{切}$ 的距离为

$$d=\left(\frac{m-k}{m+\frac{1}{m}}\right)^{\frac{3}{2}}d_0$$

其中，d_0 为函数在拐点处的法线与三次函数的交点距切线的距离。

4、设有一定直线 $y=mx$ 和一动直线 $y=kx(m\times(m-k)>0)$，对任意动直线满足条件，均有动直线上某点到定直线 $y=mx$ 的距离 $d=p(k-b)^{\frac{3}{2}}$，则这些点组成的函数图像即为关于原点对称的三次函数。

5、对函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，若其上有两点导数值相等，则此两点连线必过函数的拐点$\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$。

6、奇函数的导函数为偶函数，偶函数的导函数为奇函数。

7、对三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，若有三个零点 A，B，C。任取两个零点分别做该零点处的法线 l_A，l_B，再做过另一个零点 C 与 y 轴平行的直线 L_c，则 L_c 和 l_A，l_B 分别交于 $\mathrm{K_A}$，K_B，线段 $\overline{\mathrm{K_A K_B}}$ 的中点即为 C 点。

8、三次函数三个零点 $(x_i,0)$ 处斜率有如下关系 $\sum_i^3 \frac{1}{k_i}=0$ 和 $\sum_i^3 \frac{x_i}{k_i}=0$，其中 k_i 为 $(x_i,0)$ 处函数切线的斜率。

9、若三次函数有三个不全相等的零点，则三个零点处的切线的斜率之和的算术平均值和拐点处切线的斜率的和为零。

10、三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 和直线 $y=px+q$ 若有三个交点，则三个交点处函数切线的斜率之和为 $\sum_i^3 k_i=\frac{b^2}{a}-3c+3p$。

11、若一个三次函数有三个零点，则对于三次函数上任意一个异于零点的点 $(x_0, f(x_0))$ 均有此点和三个零点分别连线的斜率之和等于函数在该点切线的斜率（此结论适用于任意有 n 个实根的 n 次函数）。

12、若一个三次函数有三个互不相同的零点，则对于过函数极值点与 y 轴平行的直线上的任意一点 A，均有 A 和三个零点连线斜率之和为零。（此结论适用于任意有 n 个实根的 n 次函数）。

13、若一个三次函数有三个零点，则对平面上任意一个(x_0, y_0)且$(x_0, 0)$不是三次函数任意一个零点，则有该点和三次函数三个零点连线斜率之和为$y_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$(此结论适用于任意有$n$个实根的$n$次函数)。

14、若已知一个三次方程的三个根，一个为实根x_0，另两个为共轭的虚根$p \pm qi$，则可以大致画出三次方程所对应的三次函数的图像。
详见正文性质十二中所附图像。

参考文献：

本文中有个别问题是由某道题目引发的思考，但是由于研究和成文时间耽搁较长，已经找不到原题，故无法注明题目的出处。其余部分为笔者自行思考结果，故无法列出参考文献。望谅解。

特别感谢：

感谢在学习和生活中帮助过我的家长，辅导我的老师和在研究学习过程中给我支持的同学们。